

立教大学学術推進特別重点資金（立教 S F R）
大学院学生研究
2025 年度研究成果報告書

研究科名	立教大学大学院			理学	研究科	物理学	専攻
研究代表者 (2026 年 3 月現在 のものを記入)	在籍課程・学年			氏 名			
	☐ 博士前期課程 年 ☒ 博士後期課程 1 年			志賀智仁			
指導教員	所属部局・職名			氏 名			
	理学部・准教授			初田泰之			
自然・人文・社会の別	☒ 自然 ・ 人文 ・ 社会			個人・共同の別	☒ 個人 ・ 共同 名		
研究課題	AdS ₄ ブラックホールにおける準固有振動の非摂動的解析						
研究組織 (共同研究者が いる場合のみ、 2026 年 3 月現在 のものを記入)	在籍研究科・専攻・課程・学年			氏 名			
研究期間	2025 年度						
研究経費 (1 円単位)	(支出金額) 248,404 円 / (採択金額) 250,000 円						

研究の概要 (200～300 字で記入、図・グラフ等は使用しないこと。)
当該研究の研究目的を含むこと。
本研究は、ブラックホールの準固有振動を完全 WKB 法により非摂動的に解析する方法論の確立を目的とした。今年度は、3 次元調和振動子を用いて複素積分や接続公式の具体的評価法を整理し、ストークスグラフの形から許されるパラメータ領域に制限を与えられることを確認した。さらに BTZ ブラックホールについても同様の観点から解析を進め、周波数や幾何学パラメータに対する制限の把握を進展させた。一方で、ブランチカットが複数存在する場合の積分評価には未解決の困難が残っており、今後の重要課題である。
キーワード (研究内容をよく表しているものを 3 項目以内で記入。)
[完全 WKB 法] [ブラックホール] [準固有振動]

研究成果の概要 (図・グラフ等は使用しないこと。)

以下の視点を含めて記載のこと。

- ・当該研究は何をどこまで明らかにできたのか(できなかったのか)。
 - ・何をもって研究成果(経過)を達成できた(できなかった)と考えられるのか。
- 自身が設定した研究目的・目標に照らして、その根拠がわかるよう記載のこと。

本研究の目的は、ブラックホールにおける準固有振動を数値計算のみに依存せず、解析的かつ非摂動的に記述する方法論を整備することである。申請時には、AdS ブラックホールの準固有振動スペクトルを摂動展開の再和や接続条件を通じて解析的に導出し、最終的には熱的 Green 関数の極構造との対応まで視野に入れていた。これは、準固有振動がブラックホールの減衰振動を特徴づけるだけでなく、AdS/CFT 対応において双対な量子場理論の熱的応答の極に対応するためである。したがって、準固有振動を厳密に理解することは、ブラックホール物理そのものだけでなく量子場の非平衡応答を理解する上でも重要である。

今年度はこの大きな目標に向けて完全 WKB 法を用いた解析の基礎を具体的に整備することに重点を置いた。完全 WKB 法は、通常の WKB 近似を形式的な漸近展開として終わらせるのではなく、複素平面上での解の接続、Stokes 曲線の配置、turning point や特異点の寄与を体系的に扱うことで、量子化条件やスペクトル条件を非摂動的に読み取る枠組みである。特に本研究で重要なのは微分方程式の解を局所的に近似するだけでなく、複素平面全体にわたる大域的構造を見てどの解が物理的境界条件に対応するかを判定する点にある。ブラックホールの準固有振動では、地平面での入射条件と無限遠方あるいは AdS 境界での適切な条件を同時に満たす必要があるためこの大域的構造の把握が本質的である。

完全 WKB 法では、まず対象となる波動方程式を Schrödinger 型の 2 階常微分方程式に書き換えそこに現れる有効ポテンシャルから複素平面上の turning point と特異点を調べる。turning point は WKB 近似の位相が切り替わる点であり、ここから Stokes 曲線が伸びる。Stokes 曲線を横切ると、支配的な解と従属的な解の組み合わせが変化し、局所的には同じ微分方程式でも、大域的には解の接続のされ方が異なる。そのため、複素平面上で Stokes graph を描き、その形状がパラメータの変化に応じてどのように変わるかを調べるのが準固有振動条件の理解に直結する。実際、今年度の計算では、グラフの形そのものから許されるパラメータ領域に制限が入ることが具体例を通じて確認できた。

この方法論をいきなりブラックホールへ適用するのではなく、今年度はまず 3 次元調和振動子を具体例として取り上げた。3 次元調和振動子は、turning point の構造や特異点近傍での解のふるまいが比較的明瞭であり、完全 WKB 法で何を評価すべきかを学ぶための良い練習問題になっている。実際に有効ポテンシャルの形から複素平面上に複数の turning point が現れエネルギー条件によって Stokes graph の位相が変わることを確認した。また、原点近傍では正則な解、無限遠では減衰する解を選ぶ必要があり、それぞれの局所解をどのように接続するかを明示的に調べた。これにより、単に形式的な WKB 展開を並べるのではなく、どの枝を取り、どの積分経路を使い、どの接続行列を組み合わせれば量子化条件に到達するかという計算手順を具体的に把握することができた。

特に有益だったのは、複素積分の評価と変数変換の扱いを整理できたことである。今年度の検討では、原点对称性を持つ場合に複素平面上で対称なブランチカットに沿う積分が等価になること、また留数計算を用いて cut 間の積分を評価できる場合があることを確認した。3 次元調和振動子では、こうした性質を用いることで、複数の turning point を結ぶ積分を整理し最終的に既知の固有値条件と整合的な形を再現できた。これは、完全 WKB 法が単なる定性的図式ではなく、実際にスペクトル条件を具体的に与える計算技法として機能していることを示している。

研究成果の概要 (つづき)

上記の具体例で得た知見を踏まえ、今年度は BTZ ブラックホールに対しても同様の観点から解析を進めた。BTZ ブラックホールに対する有効ポテンシャルでは、複素平面上に対称性をもつ turning point 構造が現れ、3 次元調和振動子の場合と同様に、Stokes graph の形から周波数や幾何学パラメータに対する制限を読み取れることがわかった。これは、ブラックホール背景においても完全 WKB 法により物理的に許されるモードの範囲や接続条件を大域的な複素解析から抽出できる可能性を示している。今年度の到達点は、BTZ 系について数値的にグラフを描いて終わることではなくグラフの位相構造と境界条件との対応を考えることでどのような条件が準固有振動の存在に必要なかを具体的に言葉で整理できる段階に進んだことである。

一方で、研究を進める中で問題の本質的困難も明確になった。最大の課題は、ブランチカットが複数存在する場合の複素積分評価である。単純な場合には、対称性や留数計算を用いて cut 間の積分を整理できるが、ブラックホール背景では turning point と特異点の配置がより複雑であり、どの積分路を選ぶか、各枝の寄与をどう足し合わせるかが自明ではない。今年度の研究によって、どこまでが既存の方法で処理でき、どこから先で新しい整理や慎重な定式化が必要になるかを具体的に切り分けることができた。これは未完成ではあるが重要な研究経過である。

この意味で、今年度に明らかにできたことは大きく三点ある。第一に、完全 WKB 法を用いて準固有振動問題を扱う際に必要な局所解析と大域解析の役割分担を具体的に理解できた。すなわち、特異点近傍や無限遠での正則性・減衰性の判定は局所的に行われる一方で、実際に物理的解を選び出す条件は Stokes graph と接続公式を通じた大域的情報から決まることが明確になった。第二に、3 次元調和振動子を通じて、グラフの形からパラメータ制限を読み取る実践的手順を習得し、それを BTZ ブラックホールにも適用できることを確認した。第三に、複数ブランチカットが現れる場合の積分評価が今後の核心課題であることを明示できた。これらは、最終的なスペクトルの完全決定そのものではないが、その達成に必要な論点整理として十分に意味のある成果である。

さらに、extremal Reissner-Nordström ブラックホールについても予備的な解析を進め、パラメータ変化に応じて複素平面上の構造がどのように変形するかを確認した。この背景時空では、turning point の合体や特異な Stokes 構造が現れうるため、BTZ よりも複雑な挙動を示すがその分、複数ブランチカットを伴う問題を理解するための重要な試金石となる。今年度の段階では、まだ完全な量子化条件の導出には至っていないものの、今後どの背景を主たる対象とすべきか、またどの困難を優先的に解くべきかはかなり明確になった。今後は、BTZ および extremal RN ブラックホールを中心に、複数ブランチカットを持つ場合の積分評価法をさらに整備し、準固有振動スペクトルの非摂動的導出へ進む予定である。

また、研究会参加を通じて、近い問題意識を持つ研究者と議論する機会を得たことも重要であった。日本物理学会 2025 秋季大会では AdS ブラックホールの準固有振動に対する完全 WKB 解析という題目で発表を行い、自身の方法論と問題設定を外部に示すことができた。加えて、場の理論と弦理論 2025、極限宇宙、熱場の量子論とその応用に参加し、ブラックホール摂動論、複素解析、熱的応答、場の理論的手法との接点について議論を行った。これらの議論により、自身の研究の位置づけがより明確になり、今後は複数ブランチカットを伴う exact WKB 解析を一層深める必要があるという認識を得た。したがって、本研究は最終結果を完成させた段階にはないものの、方法論の実装、課題の特定、適用対象の選定という点で、研究目的に対して本質的な前進を達成したと考えている。

※この(様式 2)に記入の成果の公開を見合わせる必要がある場合は、その理由及び差控え期間等を記入した調書(A 4 縦型横書き 1 枚・自由様式)を添付すること。

研究発表 (研究によって得られた研究成果を発表した①～④について、該当するものを記入してください。該当するものが多い場合は主要なものを抜粋してください。なお、成果発表を確認できる資料を合わせて研究成果報告書提出フォームより提出してください(紙媒体等、研究成果報告書提出フォームから提出できない場合は、別途リサーチ・イニシアティブセンターへ提出してください)。

①雑誌論文(著者名、論文標題、雑誌名、巻号、発行年、ページ)

②図書(著者名、出版社、書名、発行年、総ページ数)

③シンポジウム・公開講演会等の開催(会名、開催日、開催場所)

④その他(学会発表、研究報告書の印刷等)

※修士論文・博士論文は含みません。

④その他(学会発表)

日本物理学会 2025 秋季大会(2025 年 9 月、広島大学)

発表題目: AdS ブラックホールの準固有振動に対する完全 WKB 解析