立教大学学術推進特別重点資金（立教ＳＦＲ）
個人研究費
２００７年度研究成果報告書

	所属・職名	氏　名
研究代表者	理学部　特任准教授	中根美知代　印
研究課題	１９世紀における厳密な解析学の形成過程の分析とその成果の数学教育への適用	
研究期間	２００７年 度	
研究経費	500,000 円	

研究の概要（２００～３００字で記入、図・グラフは使用しないこと）

この研究では、数学科の学生の大きな関門で、それゆえ学生も教員も関心が高い、微分積分学でのε-δ論法が成立する経緯を問題にした。微積分の教科書によく名前が登場する数学者の 1820 年代から 1870 年代にかけて公刊された著書・論文のみならず、現地へ赴いて未公刊の講義録なども収集し、それらを分析して、ε-δ論法の成立過程を実証的に明らかにした。研究の遂行にあたっては、数学教育と歴史研究を関連付ける立場を取り、問題の設定や資料の吟味に対する助言を数学科教員から積極的に受け、また講義中の学生からの反応も参考にした。分析結果は、国内外の研究集会において口頭で順次発表して助言を受けるとともに、論文として発表した。

キーワード（研究内容をよく表しているものを３項目以内で記入。）

〔ε－δ論法〕〔数学教育〕〔厳密な微分積分学〕

研究成果の概要（図･グラフ等は使用しないこと。）

微積分学において極限概念を記述するには、高校で学んだ「限りなく近づく」という表現と、大学で学ぶε－δ論法という表現がある。そして、前者は直観的でわかりやすいが曖昧で、後者のほうがわかりにくいが厳密であると教えられる。歴史的には、微積分学が成立したといわれる17世紀以降、主として「限りなく」が使われており、ε－δ論法で一貫した記述がなされるようになったのは、19世紀後半である。どのような経緯で後者が採択されるようになったのかを考察し、以下のような結果を得た。

(1) ε－δ論法的な考え方は、18世紀のラグランジュにも見られる。しかし、彼の場合は、ε－δ論法で把握される概念を、極限と同じ効用を持つ別の概念と捉えていた可能性が高いことを発見した。この見解にしたがえば、1821年の『解析学教程』において、コーシーは「極限概念を二通りで表した」とする従来の見方ではなく、コーシーは「ε－δ論法的に把握されていた概念が、実は極限の別の表現であることに気づいた」とすることができよう。

(2) したがって、コーシーの微積分学には、「限りなく近づく」とε－δ論法が並存している。彼はまた、限りなく小さい量である「無限小」も導入している。コーシーは基本的には無限小を採用していたが、不等式による評価を使いたいとき、ε－δ論法を使っていた。その意味では、ε－δ論法は厳密ではあるが、「限りなく」という曖昧な概念を払拭するために採用されたわけではなかった。

(3) 一様収束性,一様連続性と呼ばれる概念や多変数関数の連続性の定義はε－δ論法を用いないと表現できないと今日教えられる。そこで、これらの概念の形成や導入が、微積分を一貫してε－δ論法で論じるようになるための要因であると、漠然と思われていた。しかし、実際にはそうではなく、「限りなく」とε－δ論法が併用されている段階で、一様性の概念は導入されていた。

(4) ε－δ論法で一貫した講義が始めてなされたのは、1861年のワイエルシュトラスの講義である。この講義録の一部は数学史研究者によって公刊されていたが、その部分を分析しただけでは、ワイエルシュトラスの講義における極限概念の導入の仕方が理解できなかった。極限概念は、微積分学を論じるうえで、不可欠な概念であるため、ベルリン・フンボルト大学へ赴き、同大学が所蔵する資料を入手し、まだ公刊されていない部分を解読した。その結果、彼の極限概念の導入のされ方が明確になり、彼の講義の歴史的な位置づけが明確になった。

(5) ドイツでの研究集会で議論した結果、多変数関数の連続性の定義は、いつ、誰が提示したか、いまだ明確になっていないことがわかった。そこで、その過程を追跡した。1821年のコーシーの定義は今日的に読み込むことができるが、彼はまだ正しい理解に達していない。ディリクレ・ワイエルシュトラスも同様である。1870年代になって、ハイネが、コーシーの議論の問題点を見つけ、今日の「多変数関数の一様連続性」に相当するものの定義を提示する。この時点では、「一変数関数の一様連続性」は定義されていなかった。彼の弟子のトマエが、まず「一変数関数の一様連続性」を見出し、「一様連続」と「多変数関数の連続性」の概念が分離する。その上で、一様性を分離する形で「多変数関数の連続性」が定義されるようになったのが実際のところであった。ただし、最初にその定義を提出したのが誰なのかは明確にならなかった。

研究成果の概要（つづき）

上記の成果を数学教育に適用するという観点からは、次のことが明らかになった。

(1) 数学教育への適用を意識し、通常の数学の講義で理解できなかった概念の形成過程を分析するという手法は、数学史としては、あまり類を見ないものであった。しかし、そのように問題を設定しても、実証的な研究の枠組みに乗せ、歴史研究上一定の成果があがることがわかった。
(2) 微積分の教科書で挙げられている重要な例がまず発見され、それから新しい理論が作られていく過程を実際に示すことができたので、数学が作られていく典型的な過程を学生たちに説得力のある形で提示し、数学に対する新しい視点を与えることができた。
(3) 実際に講義をしている教員からは、教育の観点から問題にするべき箇所を具体的に指摘され、それを考察することにより、歴史研究の立場からみても有用な論点が提示できた。また、得られた成果も興味深く受け止めてもらえた。
(4) 数学科３－４年生むけに、一様連続性・一様収束性の概念が成立していく過程を講義してみた。効果があったのは、微積分学の講義中にある程度その概念を理解していた学生で、１年次に理解できなかった学生を救うことはできなかった。

数学教育の立場から数学史的な考察を行なうことは、歴史研究の上でも、数学教育の上でも有効であることが示された。ただし、その成果が数学教育に直接的に役立つかどうかは明確ではない。数学をよく理解した教員が、このような歴史的経緯を一通り頭に置き、それを消化した上で、学生の実力を見極め、教育に適用するという過程が欠かせないとの結論を得た。

※　この（様式２）に記入の、成果の公表を見合わせる必要がある場合は、その理由及び差し控え期間等を記入した調書（Ａ４縦型横書き１枚・自由様式）を添付すること。

研究発表（研究によって得られた研究経過・成果を発表した①～④について、該当するものを記入してください。該当するものが多い場合は主要なものを抜粋してください。）

①雑誌論文（著者名、論文標題、雑誌名、巻号、発行年、ページ）
②図書（著者名、出版社、書名、発行年、総ページ数）
③シンポジウム・公開講演会等の開催（会名、開催日、開催場所）
④その他（学会発表、研究報告書の印刷等）

① 中根美知代 “19 世紀の解析学における「厳密化革命」とは何か”『科学基礎論研究』 第 108 号 (2007 Vol.35, No.1), pp.21-28.

④ その他

研究集会発表:

Michiyo NAKANE “One Aspect of the Development of the Calculus of Variations after Euler”, Mini-Workshop : The Reception of the Work of Leonhard Euler (1707-1783), in Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, August 12, 2007.

中根美知代：“ワイエルシュトラス以降の ε－δ 論法：多変数関数に対する連続性の定義の確立”
数学史シンポジウム（津田塾大学数学・計算機科学研究所)、2007 年 10 月 27 日

学会発表：

中根美知代 “多変数関数に対する連続性の定義の形成過程” 2007 年秋季総合分科会（東北大学)
2007 年 9 月 23 日