立教大学学術推進特別重点資金（立教ＳＦＲ）
個人研究費
２００６年度研究成果報告書

	所属・職名	氏　名
研究代表者	大学院ビジネスデザイン研究科 特任教授	前　田　文　彬　　印
研究課題	マリアバン解析と量子力学を応用したデリバティブの プライシングについての考察	
研究期間	２００６年 度	
研究経費	３２７　千円	

研究の概要（２００～３００字で記入、図・グラフは使用しないこと）

キーワード（研究内容をよく表しているものを３項目以内で記入。）

〔 ブラウン運動 〕　〔 マリアバン微分 〕　〔 量子ファイナンス 〕

研究成果の概要（図･グラフ等は使用しないこと。）

ファイナンス理論のうちで、金融資産の運動を規定するブラウン運動(B(t))は、ランダム・ウォークと呼ばれるジグザグな軌跡を持ち、いたるところで微分不可能である。このランダムな運動をフーリエ展開することにより、B(t)は連続な曲線となり、統計的な処理が可能になる。

$$B(t) = \int_0^t f(t) e^{-iwt} dt$$

B(t)の密度関数の期待値を積分表示すれば、関数の期待値は初期値が与えられた時の熱伝導方程式の解を与える。これが、Wienerによるブラウン運動の数学的構成の骨子である。
ブラウン運動を確率微分方程式で表すと、解として得られるのは確率分布である。ここで、確率分布ではなく、方程式の基本解(K(t,x,B))の漸近挙動を明らかにするのがマリアバン解析の骨子である。

$$dX(t) = X(t)dt + X(t)dB(t)$$
$$X(t) = X(0) + \int X(t)dt + \int X(t)dB(t)$$
$$u(t,x) = \int f(B(t))K(t,x,B(t))dB(t)$$

得られる基本解は、tを0に近づけた場合(t↓0)に微分可能で、滑らかに変化することが知られている。このため確率微分方程式に従う株価を0近傍で漸近展開をすることが可能で、なめらかに変化する(＝微分可能な)基本解を具体的に求めることができる。不連続な階段関数(Dirichlet関数)を例にとると、関数のリーマン積分はできない。だが、階段関数の区間[0,1]のルベーグ測度は、0でルベーグ積分値も0である。ルベーグ可測な集合をAとしルベーグ測度(m)を以下のように表わすと、ルベーグ測度0の集合を漸近的に移動しても測度はやはり0で変わらない。

$$m(A) = m(A+y) = 0$$
$$A + y = \{x + y \mid x \in A\}$$

Wiener 空間(W:厳密には部分空間Hのカメロン・マルチン空間)に存在する関数には、Wiener 測度(μ)と Wiener 積分が対応する。階段関数を平行移動してみてもルベーグ測度は常 0 であるが、Wiener 測度ではそうは行かない。Wiener 測度は N 次元ユークリッド空間上のガウス分布を無限次元化したもので、Wiener 空間上の関数は Wiener 測度に関する積分として合算されなければならないからである。ルベーグ積分と対比すると、Wiener積分の特徴は以下の通りである。h(t)は関数全体の総合で、h’(t)は二乗可積分関数であるから、絶対連続な導関数を持つ。

$$\int_0^1 f(t)dt = 0$$
$$h(t) = (h'(t)) \in H \in W$$
$$h(w) = \int_0^t h dw$$

Wiener汎関数(F)を以下のように設定し、FのＨ微分（h方向への微分）を定義する。

$$F(w) = f(w(t_1), \cdots w(t_n))$$
$$\nabla F(w)[h] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(F(w + \varepsilon h) - F(w))}{\varepsilon}$$

Wiener 空間上のマリアバン微分は Wiener 測度と時間に関する H 微分で、▽iF がFの第 i マリアバン微分である。分り易く言うと、マリアバン微分は、関数をほんの僅か変化させた時のその変化率をみることであるから、確率に関する変分と考えて良い。Wiener 過程はパラメータε に依存する確率過程であり、ε についての確率過程の漸近展開により、Wiener 汎関数が示す全ての経路の総和を決定することができる。

$$\nabla^i F(w) = \varphi(t,w)$$
$$\nabla F(w) = \int_0^t \varphi(t,w)' h'(t) dt$$

※　この（様式２）に記入の、成果の公表を見合わせる必要がある場合は、その理由及び差し控え期間

研究成果の概要（つづき）

Wiener 空間上の H-微分をマリアバン微分と呼ぶ。

本研究では、ニューヨーク証券取引所(NYSE)に上場されている株式オプションについて、マリアバン微分を応用した価格評価の検討を行った。更に、マリアバン微分と量子力学的運動方程式（昨年度のSFR研究）を比較し、どちらが現実の市場に存在する証券価格のアノマリの分析に有効であるかを検討した。ブラック・ショールズの環境下にある経済を前提にすると、株価の運動方程式でεがボラティリティを増幅するパラメータを指す。

$$dS(t) = S(t)dt + \varepsilon\sigma(S(t))dW(t)$$

マリバン微分ではε→0 となる漸近展開での基本解の導出を考えており、ε=0 の極限状態での確率過程は単純な常微分方程式の解になる。従って、一般化かつ精緻化された基本解を求めることを狙ったマリアバン微分方式では、Wiener 空間における関数全体の厳密な総和を求めることができるが、選ばれた関数のボラティリティを特に強める効果は期待できない。他方、昨年度考案の量子力学的な方程式式では、量子数を変化させることにより、より強いボラティリティの変化を実現することができる。

$$MalliavinStyle: 0 < \varepsilon < 0$$

$$QuantumStyle: \varepsilon = \hbar(n + \frac{1}{2})$$

本研究では、Nasdaq に上場している Sun Microsystems の株価と株券オプションについて検討した。2006 年 3 月末同社株式は 5.03ドルで取引を終えた。株価変動の基本統計量は、最高値 5.03 ドル、最安値 3.44 ドル、分散 0.11、標準偏差 0.33 である。定常時系列の残差の QQ プロットは正規分布に従っており、統計的な分析に支障はない。2006 年 10 月満期（期間 6ヶ月）のコール・オプションの価格は 1.3ドルであり、当日の取引レンジは 1.25~1.35 であった。TB 金利を 4.5% としてオプション価格を検証する。通常の BS の公式によるオプションの理論価格（コール・オプション）は 2.16ドルで、インポライド・ボラティリティは 0.28 である。マリアバン方式によるコール・オプションの価格はボラティリティをε（0<ε＜1）倍し計算する。εが 0.1 なら 11.28、0.5 なら 2.76、1　なら 2.16 である。εに関して、0 から 1 の範囲内で乱数を発生させシミュレーションを行った結果、得られたコール・オプションの価格は 2 以下が多く、ほぼ市場の実勢値に一致しする。

量子力学方式を利用した場合、プランク定数を1としてボラティリティを量子数倍して計算する。n=1 なら 1.5　(0.495)で 2.32、n=2 なら 2.5　(0.825)で 3.07、n=3 なら 3.5　(1.155)で 3.01 である。同じく、量子数に関して乱数を発生させ、コール・オプションの価格をシミュレーションすると、量子力学方式による価格計算の方がボラティリティを増幅する効果が強いため、コール・オプションの価格は高めになる。だが、全体的には低価格方向へのバイアスが掛かっており、市場実勢の方向へ引き付けられている。

何れの手法もこれまで利用されてきたガウス過程をベースにしたブラウン運動をより一般化したもので、原資産である株価の運動方程式の拡張を通じて、デリバティブの値決めに大きな変革を求めるものである。現実にテロ事件や原油高騰などの予期せぬ出来事が発生すれば、株価の変動はその前日に予想したものとは全く逆の方向へ動く。デリバティブでリスク・ヘッジをしておいた筈の安全なポジションが一挙に危険なポジションへ急変して大きな損害を被る可能性があり、このような非常時にそなえた精緻なリスク・ヘッジ手法を予め用意しておく必要があり、マリアバン解析は非常時にまた量子ウ力学解析は大非常時に有用である。本研究の実証分析については、紙幅の制限から米国の株式オプションに止めた。だが、ブラック・ショールズの環境下にある経済ならば、金融資産の種類を問わず本理論を当てはめることができるのであり、今後債券ついて場の量子論を応用したリスク・ヘッジを検討したい。マリアバン解析と量子論を応用した確率解析により、一般化した関数空間での金融資産の価格変動を分析できる端緒が開かれたが、今後も Asset Pricing Theory が無限次元における乱雑な経路空間上の解析を中心として一層発展することは間違いない。

研究発表（研究によって得られた研究経過・成果を発表した①～④について、該当するものを記入してください。該当するものが多い場合は主要なものを抜粋してください。）

①雑誌論文（著者名、論文標題、雑誌名、巻号、発行年、ページ）
②図書（著者名、出版社、書名、発行年、総ページ数）
③シンポジウム・公開講演会等の開催（会名、開催日、開催場所）
④その他（学会発表、研究報告書の印刷等）

②前田文彬、学文社、ファイナンス入門、2007 年、212 ページ
前田文彬、日科技連出版社、量子ファイナンス工学入門、2005 年、230 ページ

④日本経営ディスクロージャー研究学会、金融機関のプロフェッショナリズムとディスクロージャーについて、2006 年
日本 FP 学会での研究報告書印刷済み。