

立教大学学術推進特別重点資金（立教 S F R）
プロジェクト研究（自由プロジェクト研究）
2003年度研究【経過】成果】報告書

研究課題	弦理論と重力理論の数学的構造解明に関する学際的研究		
研究代表者	所属・職名	氏名	
	理学部・助教授	矢彦沢 茂明 印	
研究組織	所属大学名等・職名	氏名	
	立教大学・理学部・教授 立教大学・理学部・教授 立教大学・理学部・教授 立教大学・理学部・助教授 立教大学・理学部・助教授 立教大学・理学部・助教授 立教大学・理学部・講師 立教大学・理学部・講師 東京大学大学院・理学系研究科・助手 京都大学・基礎物理学研究所・助手	佐藤 文廣 田中 秀和 比嘉 達夫 筧 三郎 佐藤 信哉 矢彦沢 茂明 大杉 英史 須佐 元 今村 洋介 杉本 茂樹	
研究期間	2003 年度	～	2004 年度
研究経費	2003 年度	年度	総計
	4,000 千円	千円	千円

研究の概要 (200～300字で記入, 図・グラフ等は使用しないこと。)

本プロジェクト研究の目的は, 物理学の基礎理論である弦理論と重力理論から生み出されてきたアイデアを数学的観点から検討し, その構造を解明することを通して, 物理学と数学の交流を活性化することである。2003年度には, 重点テーマとして,

(A) 共形場理論と保型形式
(B) モーデル・ヴェイユ格子と弦理論・可積分系

を取り上げ, 5回の研究集会を行うことによって両分野間の理解を深めることができた。また, この2つのテーマに関連する題材に関しても, 個々の成果を上げることができた。さらに, 講演やレクチャーを元に3冊の講究録を作成したことは, 今後の進展に有意義であると共に, 学外への波及や大学院教育にも役立つと言える。

キーワード (研究内容をよく表しているものを3項目以内で記入。)

[弦理論] [保型形式] [可積分系]

研究【経過・成果】の概要 (図・グラフ等は使用しないこと。)

本プロジェクト研究は、物理学の基礎理論である弦理論と重力理論に表れる数学的構造を吟味・検討することを通して、物理学・数学の交流をより活発化し、両分野における新たな研究領域を切り開くことを目的としている。この目的を達成するための出発点として、初年度である 2003 年度には、いくつかの具体的なテーマを設定し、それらに対する物理学・数学双方からの知識を集積することによって、お互いの理解を深めることを試みた。テーマの設定にあたっては、比較的短期間で優れた結果を得るべく、本学のスタッフの特色、および学外メンバーの専門領域をも考慮しつつ選定を行った。2003 年度前半は、そうして選ばれたいくつかのテーマのそれぞれを、プロジェクトメンバーのうちの数名が分担する形で、基礎的な調査および検討を行った。そこでの検討に基づき、2003 年度後半には特に、

(A) 共形場理論と保型形式

(B) モーデル・ヴェイユ格子と弦理論, 可積分系

という 2 つのテーマに重点をおき、プロジェクトメンバー以外も参加する形での研究集会を開催し、そこでの講演に基づいた講究録を作成している。(講究録に関して、詳しくは「研究発表(様式 3)」を参照していただきたい。)以下ではまず、(A)、(B) それぞれに対して、2003 年度における経過を、より具体的に紹介する。

(A) 共形場理論と保型形式

共形場理論とは、スケール変換等に関して不変な系を扱う考え方である。共形場理論と、整数論において重要な概念である「保型形式」との関係はよく知られているので、それを改めて考察し、そこから新たな理論を生み出そうというのが本テーマである。2003 年度は、まず幅広い立場から関連する話題を集め、それらを整理するという意味で、2 回の研究集会を開催した(9 月, 12 月)。密接に関連しあう対象を扱っている方々に参加していただいたため、活発な討論が行われ、交流を深めるという目的は十分に達成されたといえる。また、9 月, 12 月の研究集会での講演内容は講義録の形でまとめられており、2004 年度の研究への重要な足場を与えている。

さらに、このテーマに関係する物理的問題がいくつか解決の方向に向かっているため、その問題ごとに経過と成果を説明する。

- (1) 4次元の共形場理論と同じ対称性を持つ曲がった時空は反ド・ジッター(AdS)時空である。この AdS 時空上で弦理論を量子論的な扱いで厳密に扱うことは現時点では困難であるが、ある極限(ペンローズ極限)をとることによって、ある扱いやすい時空(pp-wave 時空)を導出し、その上で弦理論を厳密に扱うことができる。さらに、pp-wave 時空上の弦理論のスペクトルと 4次元の共形場理論のゲージ不変演算子との対応関係が指摘されている。プロジェクトメンバーの今村氏は、高い対称性を持つこの pp-wave 時空をコンパクト化した場合にまで、この対応関係を拡張することに成功した。
- (2) 上で述べた AdS 時空は、一見全く関係ないと思われる統計学や情報理論にも現れる。従って、この時空と統計学や情報理論との関係を調べることは興味深いことである。ある分布と別のある分布との関係(距離)を表すときに情報計量が使われる。プロジェクトメンバーの矢彦沢氏は、場の理論におけるインスタントンと情報計量との関係を調べ、この場合の情報計量が確かに AdS 時空となることを示し、さらに、インスタントン電荷依存性も明らかにした。これは、重力理論、共形場理論、情報幾何学等との密接な関係を示唆している。
- (3) 多数の粒子が重力と関わる重力多体系においては、理論的には、共形場理論と関係したスケール則が現れる。この重力多体系の代表的な系は、銀河や天体が存在する我々の宇宙そのものである。標準宇宙モデルでは小さいスケールの揺らぎが大きいと考えられており、理論上、次の二つのことが知られている：
 - (イ) 銀河や銀河団の内部に普遍的なスケール則が現れる。
 - (ロ) 銀河よりも小さいスケールにたくさんの天体がスケール則に従って現れる。
 しかし、これらの結果は観測的には支持されておらず、大きな問題と考えられている。プロジェクトメンバーの須佐氏は、問題(ロ)をガスと輻射との相互作用を含めて考えることによって解消した。

これら(1)~(3)という物理的問題をより深く理解するためには、関連する数学的理論を進めておくことも重要であるので、2004 年 3 月には、筑波大学の研究者と共同で、「概均質ベクトル空間の b 関数, ゼータ関数」と題する研究集会を開催した。さらに、保型形式の数学と物理学との関係を探る上で重要な例となる、所謂「可解格子模型」に関して本学の山田裕二氏が行った講義を、北根靖史氏(本学大学院生)の協力の下、講究録の形にまとめた。この分野は、現在でも急速に発展しつつある一方、初学者に対して適切な入門書が不足していたので、今回まとめた講究録の意義は小さくないと思われる。

研究【経過・成果】の概要 つづき

(B) モーデル・ヴェイユ格子と弦理論、可積分系

このテーマは、本学の塩田徹治氏によって提案された「モデル・ヴェイユ格子」という数学的(より正確には、代数幾何学的)概念が、物理学の理論にどのように表れるかを理解し、それを発展させるというものである。2003年度は、まず前期に今村氏によって、「弦の接合」と呼ばれる概念との関係が解説された。さらに、プロジェクトメンバー以外の研究者も交えて、物理サイド、数学サイドの両者が、お互いの問題意識を理解することを目的とした研究集会を開催した(2004年1月)。研究集会では、発案者である塩田氏による入門的な講義に続き、山田泰彦氏(神戸大)によって物理系への応用が解説された。この研究集会の内容は、講究録の形でまとめられている。また、より広い意味での代数幾何学との関係を探るべく、モデル・ヴェイユ格子の研究集会と並行する形で、プロジェクトメンバーの大杉氏主催の可換環論のセミナーも開催した。

研究集会での山田氏の講演は、弦理論に表れるサイバーク・ウィッテン曲線を題材に、モデル・ヴェイユ格子との関係、ひいてはパルベ方程式という微分方程式との関係までが解説されるという、示唆に富むものであった。実際、塩田氏は山田氏の講演から、代数曲面と保型形式との関係についての新たな着想を得ており、その方向での研究を開始している(雑誌「数学セミナー」2004年5月号に、塩田氏による解説がある)。2004年度にも本プロジェクト研究が採択されれば、この新たな方向に関しての研究集会を開催する予定である。

また、山田氏の講演にも現れたパルベ方程式は、「可積分系」と呼ばれる特殊なクラスの代表例であり、プロジェクトメンバーの筧氏によってソリトン方程式と関係付ける一般的な方法が明らかにされている。更に、プロジェクトメンバーの杉本氏は、可積分系における重要な手法である「ボゾン化」を利用して、弦理論における量子電磁力学を解くことによって、弦理論に対する新たな知見を得ることができた。こういった結果におけるモデル・ヴェイユ格子の役割を明らかにすることは、今後の課題である。

以上の(A)、(B)以外にも、2004年度以降の研究につなげるべく、数名のメンバーによって予備的な結果が得られている題材がある。以下ではそれらのうちの2つを紹介したい。

(C) 量子重力と多様体の不変量

このテーマは、プロジェクトメンバーの佐藤信哉氏、比嘉氏を中心として進められている。アインシュタインによる重力理論の量子化は、物理学における重要な未解決問題であるが、そこでの試みの中に見られる数学的構造のうち、特に3次元多様体の不変量に関するものを考察しようというのがこのテーマである。佐藤信哉氏は、作用素環論の手法を用いてこの問題に取り組んでおり、その問題意識をメンバー全員で共有するため、2003年度には佐藤信哉氏および河東泰之氏(東大)によって、作用素環論の入門的セミナーが行われた。物理サイドのメンバーとしてセミナーに参加していた石川洋氏(東北大)との間に活発な議論が行われ、その後も研究交流が続いていることは、本研究が研究交流の活発化を目的としているという意味で、特筆に価するであろう。また、比嘉氏は多様体上のファインマン積分を数学的に正当化するという研究を行っており、佐藤信哉氏のアプローチとの関係を見出すことは、今後の課題の一つである。

(D) 物理系に表れるゼータ関数

物理学分野において、粒子散乱を量子論的に取り扱う際に表れる積分は、4次元では発散を含む場合がある。そこで、4次元から少し次元をずらして積分を実行することで発散を避ける、「次元正則化」という手法が用いられる。この次元正則化法を用いて計算を行うと、階乗を一般化した関数であるガンマ関数の積が頻繁に現れてくる。ガンマ関数は、整数論において重要な対象であるゼータ関数と密接に関係するので、プロジェクトメンバーの田中氏を中心として、数学における結果を物理系に表れる積分の評価に応用できるかどうかの検討を進めている。プロジェクトメンバーであった故荒川氏は、多変数ゼータ関数の特別な整数での値である「多重ゼータ値」に関して豊富な結果を遺しているもので、それらの結果を物理系に応用することも、重要な課題であろう。多重ゼータ値の満たす関係式は、共形場理論に表れるクニズニク・ザモロドチコフ方程式と関係することが知られているので、(A)のテーマとの関連を調べることも興味深い。

これらの(C)、(D)という題材は、2003年度を中心課題である(A)、(B)とも密接に関係するので、それらを包括的に理解することを目的とした研究集会を開催することを計画中である。この方向で研究を進めることによって、数学・物理学の枠を越えた普遍的な理論が構築される可能性がある。本研究の最終的な目的は、単に総花的な情報の集積に留まらず、新しいものの見方を提供することであるが、2003年度の結果は、その大きな目標に対するよい足場となっていると思われる。

※ この(様式2)に記入の、経過・成果の公表を見合わせる必要がある場合は、その理由及び差し控え期間等を記入した調書(A4縦型横書き1枚・自由様式)を添付すること。

研究発表 (研究によって得られた研究経過・成果を発表した①～④について、該当するものを記入してください。該当するものが多い場合は主要なものを抜粋してください。)

- ①雑誌論文 (著者名, 論文標題, 雑誌名, 巻号, 発行年, ページ)
- ②図書 (著者名, 出版者, 書名, 発行年, 総ページ数)
- ③シンポジウム・公開講演会等の開催 (会名, 開催日, 開催場所)
- ④その他 (学会発表, 研究報告書の印刷等)

① 雑誌論文:

1. H. Tanaka, "Initial state parton evolution beyond the leading logarithmic order of QCD", *Progress of Theoretical Physics* **110**, 2003, 963
2. S. Yahikozawa, "Information metric on instanton moduli spaces in nonlinear sigma models", *Physical Review E* **69**, 2004, 026122
3. T. Kikuchi, T. Ikeda and S. Kakei, "Similarity reduction of the modified Yajima-Oikawa equation", *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36-45**, 2003, 11465
4. 笈三郎, 量子カロジェロ模型, 別冊・数理科学「現代数理物理の展開」, 2003, 58
5. 菊地哲也・笈三郎, 一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層の相似簡約と affine Weyl 群対称性, 京都大学数理解析研究所講究録 **1348**, 2003, 134
6. H. Ohsugi, D. Ikegami, T. Kitamura and T. Hibi, "Groebner bases of certain zero-dimensional ideals arising in coding theory", *Advances in Applied Mathematics* **31**, 2003, 420
7. H. Susa and M. Umemura, "Formation of Dwarf galaxies during the cosmic reionization", *Astrophysical Journal* **600**, 2004, 1
8. A. Yonehara, M. Umemura and H. Susa, "Quasar mesolensing - direct probe to substructures around Galaxies", *PASJ* **55**, 2004, 1059
9. 須佐元, 宇宙物理における輻射輸送問題, 天文月報 2003年12月号, 642
10. Y. Imamura, "Strings in a PP-wave background compactified on T^8 with twisted S^1 ", *Progress of Theoretical Physics* **110**, 2003, 1021
11. Y. Imamura, "Decay of type 0 NS5-branes to nothing", *Physical Review D* **69**, 2004, 026005

③ シンポジウム・公開講演会等の開催:

1. 弦理論と共形場理論, 2003年9月16日~17日, 立教大学4338教室
2. A. Zhedanov氏(Donetsk Institute)講演会, 2003年12月10日, 立教大学4404教室
3. 共形場理論と保型性, 2003年12月19日~20日, 立教大学4412, 4338教室
4. 可換環セミナー, 2004年1月27日~30日, 立教大学7201教室
5. モーデル・ヴェイユ格子と弦理論, 可積分系, 2004年1月29日, 立教大学4353教室
6. 概均質ベクトル空間の b 関数, ゼータ関数, 2004年3月10日~13日, 筑波大学

④ その他・学会発表:

1. 笈三郎, 「Weyl group action on a derivative nonlinear Schroedinger equation」
国際会議: Integrable systems: linear and nonlinear dynamics, 2003年6月, Arran (Scotland)
2. 鈴木敏之・笈三郎, 「可解格子模型と離散 Euler-top」, 研究集会: 非線形波動および非線形力学系の数理とその応用, 2003年11月, 九州大学応用力学研究所
3. 須佐元, 「Effects of early reionization on the formation of galaxies」,
国際会議: Joint Seminar Japan-Italy, 2003年12月1日~6日, 新潟大学
4. 須佐元, 招待講演「Dark Ageの天体形成とWMAP」, 日本物理学会, 2003年9月10日, 宮崎
5. 大杉英史, 「Indispensable binomials of toric ideals」, 「Prestable ideals and Sagbi bases」,
日本数学会年会, 2004年3月28日~31日, 筑波大学
6. 杉本茂樹・高橋一芳, 「QED in string theory」, 日本物理学会, 2004年3月27日, 九州大学

・ 研究報告書:立教大学SFR自由プロジェクト研究

「弦理論と重力理論の数学的構造解明に関する学際的研究」講究録シリーズ:

1. 講究録 No.1: 弦理論・共形場理論と保型性, 103 ページ
2. 講究録 No.2: 可解格子模型入門 I, 77 ページ
3. 講究録 No.3: モーデル・ヴェイユ格子と弦理論, 可積分系, 63 ページ

研究【経過・成果】の詳細

＜申請当初の計画・目的の達成度＞

申請時の研究計画において、2003年度は基礎的な調査を行い、その後の研究の出発点となるようにまとめ上げる作業を行うという位置付けであった。当初の研究計画では、本プロジェクトで扱うテーマとして、前述（様式2）の(A)、(B)を含むいくつかの題材を候補として挙げた。2003年度前期の検討に基づき、それらの中から特に(A)、(B)を重点的に扱い、関連分野の研究者が集まる場を設け集中的に議論することとしたため、密度の濃い有意義な議論となった。2003年度の主たる目的は、それ以降につながるような足場を築くことであったので、それは十分に達成されたと言ってよいであろう。それに加え、メンバーの個々の成果が上がり始めたことも重要なことである。

また、2つのテーマに関連して、3冊の講究録を編纂することができたことは、当初の予想を上回るものであった。こういった講究録は、ある程度まとまった量を発行することで初めて外部から認知されるので、2004年度にも引き続き発行していきたいと考えている。

＜優れた成果があがった点＞

本研究の目的に向けての最初の段階として、物理学・数学の交流を活性化することが重要である。2003年度には、

(A) 共形場理論と保型形式 (B) モーデル・ヴェイユ格子と弦理論、可積分系

の2つを中心のテーマとして、数回の研究集会を開催した。類似の対象を研究していながらこれまで出会うことのなかった研究者と議論をする場を設けたことによって、翌年度以降への足場を固めたことは、大変に意義深かった。これらのテーマに関しては、「研究経過の概要（様式2）」で述べたように、個々の専門的な成果が上がっている。

また、研究会での講演等を元に、3冊の講究録としてまとめた。これは、今後の研究の出発点として重要であるだけでなく、立教SFRを学外に知らしめるという意味においても意義深い。さらに特筆すべきは、作成した講究録の一つを学んだ大学院生が、関連したテーマで修士論文を執筆したことである。これは、本プロジェクトが、研究という観点からだけでなく、本学における教育という視点からも意義深いことの証左であると考えられる。

＜問題点＞

上述のように、2003年度は2つの大きなテーマの元に、物理学者と数学者が専門を越えて議論ができるような基盤を作る作業を行った。そのこと自体は成功したといえるが、その一方、テーマの中に含まれる個々の題材に関して、現時点では、プロジェクトメンバーそれぞれが研究結果を蓄積しているという域を出ず、メンバーの共同作業の結果としての大きな新理論の提案までには至っていない。

この最終目標に到達するためには、メンバー全員が互いの研究をより深く理解し、その後どのような戦略で研究を進めるかについての議論を進めていくことが必要であろう。現段階でも既にいくつかの共同作業が生まれているので、翌年度も引き続き研究交流を行うことで、この問題は解決できると思われる。包括的な新理論の提案に向けて、メンバー間の活発な議論や交流をすると共に、学外の研究者を含めた刺激的な研究集会を数多く行うことで、個々の題材を統一的に理解し得るような視点の提案に近づくことが可能となるであろう。

＜外部資金への応募状況・応募予定、および研究期間終了後（最終年度終了後）の展望＞

本プロジェクトの課題と関連するテーマに関して、平成16年度科学研究費申請を複数個行った。結果としては、内二つ（研究代表者：佐藤文廣、筧三郎）が採択された。これは本プロジェクトをさらに勢いづけるものであり、本予算と合わせることで、より多くの研究者を招き、より大規模な研究集会を開催することが可能となるので、より広い視野からの研究が可能になると期待される。

また、研究期間終了後（最終年度終了後）の展望としては、本テーマをさらに進展させ、物理学と数学の新たな開拓分野をひらき、一拠点を築いていきたいと考えている。外部資金としては、(A)、(B)のようなテーマに関して科学研究費の基盤Bを申請し、それと並行して、派生的なテーマに関して萌芽的研究に申請することを計画している。そうやってテーマを深めていくことで、より長期的な展望として、理学部・理学研究科全体としての新しい学術フロンティア、COEといった大型予算を申請する規模の研究にまで発展させていきたいと考えている。

＜その他（本資金制度等について、ご意見・ご要望等がありましたらご記入下さい）＞

現行では4月～5月に中間評価が行われ、予算が実際に執行可能となるのは早くとも6月となってしまう。これだと2年目も6月までは具体的な研究計画が立てられないことになり、実質1年半程度しか残らない。本プロジェクトのような理論的な研究の場合、研究集会開催用の招聘旅費が予算の多くを占めるため、できる限り早い時期から計画を立てたい。そこで、中間評価をより早い段階で行い、翌年度の早い段階から予算の執行を可能にすることはできないであろうか。そうすることで、2年という限られた期間をより有効に利用することができると思われる。